

采用余弦拟合的随机共振反演技术研究

谭继勇, 陈雪峰, 何正嘉

(西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对当前随机共振反演方法实施过程流程复杂、需要调节的参数繁多、对幅值的估计不准, 以及难以处理频率相差较大的多频信号等诸多问题, 提出了一种新的采用余弦拟合的随机共振反演算法. 该算法采用移频变尺度随机共振检测频率, 利用所得频率设计余弦曲线对输入信号进行最小二乘拟合, 不需对特殊点进行特别处理, 幅值不受波形畸变的影响, 因此可以处理频率相差任意大小的多频信号. 通过数值仿真和机车走行部故障的诊断, 验证了该算法具有较强的工程实用性, 同时结合频谱校正技术可以进一步提高该方法的精确性, 更准确地检测出信号频率及幅值.

关键词: 余弦拟合; 随机共振; 反演

中图分类号: TH17 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)01-0041-05

Study of Stochastic Resonance Recovery Based on Cosine Fitting

TAN Jiyong, CHEN Xuefeng, HE Zhengjia

(State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The conventional stochastic resonance recovery techniques are facing some troubles, such as the complex process, too many parameters, wrong estimated amplitudes, and especially the difficulty for processing the multifrequency signals with frequencies staying far away from one another. A new strategy is proposed, where frequency-shifted and re-scaling stochastic resonance are adopted to detect frequencies, the input signals are least square fitted with cosines designed based on the acquired frequencies, and no special postprocessing is required for the distorted points, the waveform distortion has no influence on the amplitude quantization. Almost all the multifrequency signals can be processed. The effectiveness is validated by a simulation and a fault quantitative diagnostic case of electric locomotive running parts. The amplitude of periodic signals can be reduced by non-periodic sampling, the accuracy is thus developed by involving the spectrum correction technology, and more accurate signal frequencies and amplitudes can be detected.

Keywords: cosine fitting; stochastic resonance; recovery

自 1981 年 Roberto 等人^[1]研究古气象冰川问题时提出随机共振(SR)的概念以来, 关于 SR 的理论、实验和模型方面的研究^[2-4]已经成为近 30 年来的一个研究热点. SR 利用噪声来加强有用信号的特点, 使得它在微弱信号的检测方面^[5-7]具有独特的优势, 但是由于系统对周期信号的响应输出畸变为含高频成分的矩形(或梯形)波, 同时对信号有不同程度的非线性放大, 给非方波周期信号的后处理带来

了诸多不便, 因此阻碍了 SR 用于机械故障的定量诊断. 文献[8]提出了一种 SR 反演方法用于恢复输出波形, 文献[9]从粒子运动轨迹的角度对这种反演方法进行了更为详细的阐述, 但这些方法都需要寻找系统拐点, 对拐点处的波形畸变进行特殊处理, 再分段进行非线性插值. 由于程序复杂, 需要调节的参数繁多, 因此对频率相差较大的多频信号的处理比较困难.

本文对文献[8]中的反演公式进行了重新推导,分析了该方法的不足,在此基础上提出了一种在移频变尺度随机共振^[10](FRSR)辅助条件下,采用余弦拟合的信号反演方法.该方法简单,物理意义明确,无需对拐点部分进行特殊处理,就能得到更可靠的各频率的成分幅值.

1 双稳态系统公式法反演技术

在过阻尼状态下,受外界周期激励 $s(t)$ 和 Gauss 白噪声 $n(t)$ 的作用,Brown 粒子在双稳态系统 $U(x)$ 中的运动可用 Langevin 方程表示为

$$dx/dt = -dU(x)/dx + s(t) + n(t) \tag{1}$$

式中: $s(t)+n(t)$ 为系统的输入信号; x 为 t 的函数,是粒子的运动轨迹,也是系统的输出.反演的目的是找出信号 $\hat{s}(t)$ 来逼近 $s(t)$,用最简单的双稳系统进行研究,则

$$s(t) = dU(x)/dx + dx/dt - n(t)$$
$$U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4, \quad a > 0, b > 0 \tag{2}$$

式中: a, b 为系统参数.由于 $s(t)$ 是小幅值的缓变信号,文献[8-9]中认为 dx/dt 是一个无穷小量,对式(2)两边取均值,考虑白噪声均值为0,得到

$$\hat{s}(t) = s(t) = -ax + bx^3 \tag{3}$$

由于 x 是 $s(t)$ 在噪声辅助下的非线性放大,其幅值可以是 $s(t)$ 的数倍甚至数十倍,使得信号被竖直拉长,形成矩形波或梯形波.在系统状态发生变迁,即布朗粒子从一个势阱进入另一个势阱时,会有一个较大的突变,这时 dx/dt 将较大且不可忽略.在这些点及其附近使用式(3)进行反演就会出现较大的偏差而产生畸变,这也是文献[9]中的所谓拐点畸变的通俗解释.

微分项对快变信号敏感,即有微分项的系统有较好的跟踪速度,可以跟踪到输入信号(在反演公式中,共振输出 x 为输入信号)中的噪声变化,即在反演结果中还会出现较多的噪声.根据式(2)还可以看出,虽然保留了微分项,但噪声也被保留了下来,这就是文献[8-9]中忽略微分项的主要原因.根据能量守恒定律,还原出来的信号应该与 $s(t)$ 的能量相当,即为定值,拐点处畸变越大,与 $s(t)$ 对应频率成分的幅值就相差越远.

2 采用余弦拟合的信号反演技术

由于保留了微分项即保留了噪声,忽略微分项则会造成反演信号畸变,影响目标频率的幅值,因此本文放弃了公式法,绕开了这个微分悖论.如果周期

为 T 的信号 $s(t)$ 满足 Dirichlet 条件,就可以将其展开为傅里叶级数,即

$$s(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\Omega_0 t) + b_k \sin(k\Omega_0 t))$$
$$\Omega_0 = 2\pi/T \tag{4}$$

式中: Ω_0 为 $s(t)$ 的基波频率; $k\Omega_0$ 为 $s(t)$ 的第 k 次谐波 a_0, a_k, b_k 为各次谐波幅值.由于

$$\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$$
$$a \cos x + b \sin x = (a^2 + b^2)^{1/2} \sin(x + \varphi)$$
$$\tan \varphi = a/b \tag{5}$$

因此式(4)又可以写成

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t + \varphi_k)$$
$$c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}, \tan \varphi_k = a_k/b_k, \varphi_0 = \pi/6 \tag{6}$$

式中: φ 和 φ_k 为谐波的初始相位.

从式(6)中可以看出,任何满足 Dirichlet 条件的周期信号都可以用有限或无限条正弦曲线的叠加来拟合.由于正、余弦可互换,式(6)也可以写成余弦形式,所以本文将这2种曲线拟合方式统称为余弦拟合.

因 x 的信噪比较高,可通过快速傅里叶变换(FFT)计算,轻松获得 $s(t)$ 的频率,所以用该频率设计余弦曲线对输入信号进行拟合,便可得到对 $s(t)$ 幅值的估计.利用 SR 验证周期成分的存在,采用余弦拟合从输入信号中提取纯净的周期成分,这样既去掉了噪声,又避免了畸变带来的幅值影响,从而得到一个较完美的 $s(t)$ 的逼近 $\hat{s}(t)$.

当 $s(t)$ 是一个单频小信号(频率、幅值、噪声强度都远小于1)时,可直接利用上述方法得到 $s(t)$.若 $s(t)$ 是多频小信号,不失一般性,则以双频信号为例,若两频率相差在一个数量级内,且均小于0.5 Hz,即可同时被 SR 检测到^[11],并用2个余弦的叠加得到 $\hat{s}(t)$.然而,工程中的信号往往是大信号(频率、幅值、噪声强度不都远小于1),需要采用大信号 SR,当多频信号频率相差较大时,用普通的大信号 SR 就很难检测出高频信号.采用移频变尺度随机共振(FRSR)^[10]可以解决上述难题,从强背景噪声中检测出复杂多频的大信号,假设输入信号频率为 f_0 ,则 FRSR 将对其进行下述变换

$$f' = (f_0 - f_c)/R \tag{7}$$

式中: f_c 为移频点频率; R 为变尺度压缩率(频率压缩率).FRSR将 f_c 以下的频率成分去掉,将 f_c 及以下的频率成分向下移动,再对信号频率进行线性压缩,从而满足了远小于1的绝热近似条件.当 f_c

$=0, R=1$ 时,FRSR 就退化为传统的 SR,可见传统 SR 是 FRSR 的特例. 后文均以 FRSR 进行说明,不再单独提及传统的 SR.

假设 SR 检测出 f_1, f_2 , 则 $\hat{s}(t)$ 可以表示为

$$\hat{s}(t) = \beta(1)\cos(2\pi f_1 t + \beta(2)) + \beta(3)\cos(2\pi f_2 t + \beta(4)) \tag{8}$$

其中 $\beta=(\beta(i), i=1, 2, 3, 4)$ 表示待估计参数序列, 包括对应的谐波幅值和相位. 根据最小二乘原理, 最小的 β 序列即为最优值, 即

$$Q = \sum_{k=1}^N [s(t_k) - \hat{s}(t_k)]^2 \tag{9}$$

将最优的 β 值代入式(8)即可得到 $\hat{s}(t)$.

对于多频大信号的 SR 反演技术可以分为以下几个步骤:①预估计信号频段或选择感兴趣频段;②采用 FRSR 处理预定频段信号;③必要时变更目标频段重复步骤②;④用所检测出的频率设计一个或几个余弦曲线,并叠加起来拟合输入信号. 具体流程如图 1 所示.

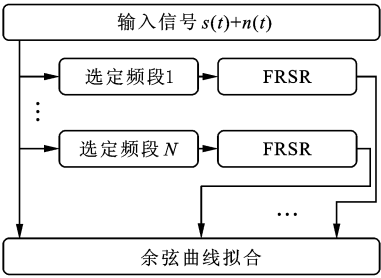
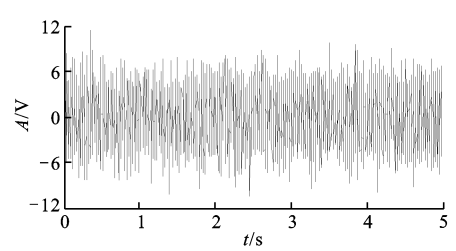


图 1 采用余弦拟合信号的反演技术流程

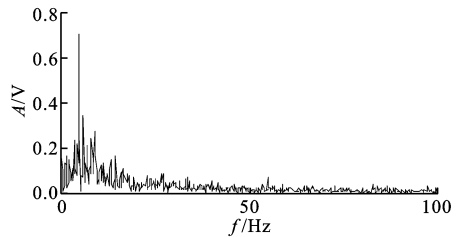
3 反演技术仿真

假设输入信号为双频信号 $s(t) = 0.31 \cdot \cos(100\pi t) + 0.31\cos(200\pi t)$ 和方差为 3 均值为 0 的 Gauss 白噪声的合成, 采样频率为 1 kHz, 数据长度为 5 000 点, 设 $f_c = 45 \text{ Hz}$, $R = 100$, $a = 0.8$, $b = 0.6$, 即可检测出 50 Hz 的频率成分, 参数选择方法可参考文献[7]. 根据文献[10]的扫频法, 经过 3 次尝试, f_c 变为 90 Hz, 保持 R 不变, 设置 $a = 0.6, b = 0.7$, 可检测出 100 Hz 的频率成分. 为方便时频域的显示和对比, FRSR 检测出的频率成分均以差频 $(f_0 - f_c)$ 形式表示, 两频率分别显示为 5 Hz(50-45)和 10 Hz(100-90). 用检测出来的 50 Hz 和 100 Hz 的频率来设计余弦曲线, 对输入信号进行曲线拟合后得到了 $\hat{s}(t)$. 图 2 中只画出了前 60 个点(0.06 s)的图像, 相关图谱见图 2b 和图 2c.

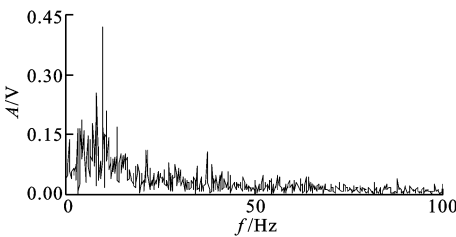
从图 2b 和图 2c 中可以看出, 5 Hz 和 10 Hz 的



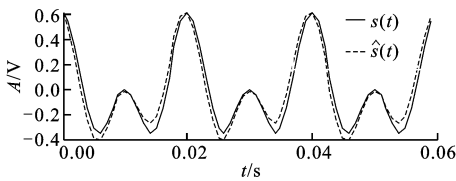
(a)输入信号



(b)共振频谱($f_0 = 50 \text{ Hz}$)



(c)共振频谱($f_0 = 100 \text{ Hz}$)



(d)反演信号与输入多频信号

图 2 反演技术仿真结果

差频峰都非常显著且单一, 峰值 A 所对应的频率峰都有不同程度的放大, 说明 FRSR 的检测结果良好. 在图 2d 中, 虚线成分与实线成分在少部分地方有些不重合, 但总体上两波形还是比较相近的, 即反演结果对输入多频信号的估计较为准确. 在余弦拟合的结果中, 两频率成分的幅值分别为 0.325 3 V 和 0.302 5 V, 与输入的多频信号幅值(0.31 V)有一点误差, 这是同频白噪声(全频信号有与信号频率相同的成分)对信号幅值的影响, 可以适当减小这种误差, 但目前还没有办法消除.

由于是余弦曲线拟合, 反演的频谱图中除了拥有准确峰值的谱峰外, 既没有噪声又没有干扰峰, 可以非常方便地处理后续数据. 但是, 非周期采样也会对周期信号的幅值造成影响, 可以用频率校正的方法进行校正^[12].

4 机车走行部的损伤识别

将某型客运机车轮对滚动轴承在试验台上进行测试,轴承型号为 552732QT,轴承转速为 515 r/min,根据相关公式可得轴承外圈、内圈及滚动体故障对应的特征频率分别为 61.93 Hz、83.98 Hz 和 27.75 Hz.采用 ICP 振动传感器在水平和竖直 2 个位置对轴承的径向加速度信息进行了测试采集,采样频率为 12.8 kHz,并取垂直位置的振动 16 384 点(频率分辨率为 0.761 3 Hz)进行分析.由于滚动轴承故障往往表现出调制特性,因此对振动信号进行了 Hilbert 包络解调,然后应用所提方法进行检测,相关图谱如图 3 所示.

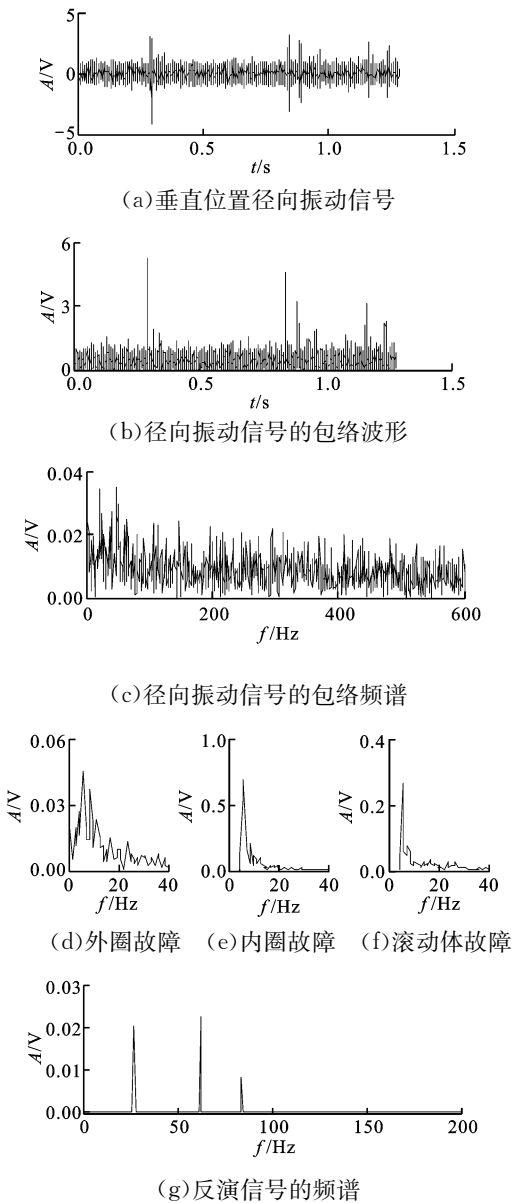


图 3 机车走行部损伤识别信号的分析

为减小非周期采样对频率检测的影响,设 $f_c=56.25\text{ Hz}$ 为频率分辨率的整数倍,当 $a=0.01, b=2$ 时,在 FRSR 的结果中出现了 6.25 Hz 的差频谱峰.根据式(7)得到 $f_0=62.50\text{ Hz}$,这与轴承外圈故障特征频率相差不到一个频率分辨率,可认为这就是外圈故障的特征频率.如图 3d~3e 所示,用同样的方法,设 $f_c=82.03\text{ Hz}, a=0.1, b=2$,可以检测到轴承的内圈故障特征频率为 84.374 Hz .设 $f_c=25.78\text{ Hz}, a=0.05, b=0.1$ 时,可以得到轴承的滚动体特征频率为 27.34 Hz .由于参数不同,幅值没有参考价值,用 3 个特征频率设计余弦曲线,并对振动信号的包络进行拟合,得到的幅值分别为 $0.020\ 5\text{ V}, 0.022\ 3\text{ V}$ 和 $0.008\ 6\text{ V}$.为了得到一个衡量各种滚动轴承状态的参数,SPM 方法规定了一个只与轴承工作状态有关的标准分贝值^[13]

$$d_{\text{Bn}}=20\lg(2\ 000S_v/(ND^{0.6}))\tag{10}$$

式中: N 表示轴承的转速; D 表示轴承内径; S_v 表示冲击值,即对应轴承故障特征频率处的峰值.可以根据 d_{Bn} 的如下值来判断轴承的运行状态:①在正常状态时, $0\leq d_{\text{Bn}}<21\text{ dB}$;②在轻微故障时, $21\leq d_{\text{Bn}}\leq 35\text{ dB}$;③在严重故障时, $35< d_{\text{Bn}}\leq 60\text{ dB}$.

将这 3 个特征频率的幅值代入式(8)后得到对应的 d_{Bn} 分别为 $27.394\ 6\text{ dB}, 28.125\ 6\text{ dB}$ 和 $19.849\ 5\text{ dB}$.可见,轴承存在外圈和滚动体复合故障,而内圈状态良好,将轴承解体后可以发现外圈存在明显损伤,滚动体上存在多处细小凹坑(见图 4).

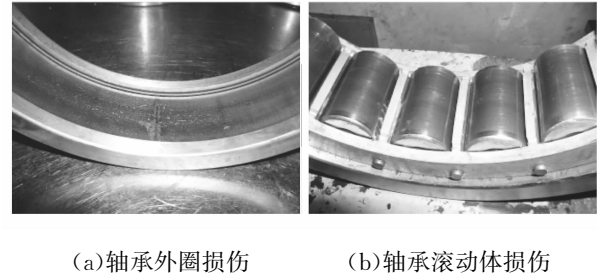


图 4 机车走行部轴承损伤实拍

5 结 论

本文分析了当前反演方法的不足和症结所在,研究了采用余弦拟合信号的可行性,并提出了采用余弦拟合的 SR 反演算法.为了检测差频较大的大信号,本文引 FRSR 来代替普通的 SR 算法,该算法的物理意义明确,过程简单,不用对特殊点进行特别处理,对幅值估计得相对准确,从仿真信号中能够很好地反演出差频较大的输入大信号.本文方法应用

于机车走行部故障诊断时,准确地检测出了轴承的外圈和滚动体复合故障,如果再结合频谱校正算法则可以克服非周期采样引起的幅值偏差,但同频噪声的影响是学术界一直难以解决的问题,因此还有待做进一步研究。

参考文献:

- [1] ROBERTO B, ALFONSO S, ANGELO V. The mechanism of stochastic resonance [J]. *Physical A*, 1981, 14 (11):L453-L457.
- [2] BRUCE M, KURT W. Theory of stochastic resonance [J]. *PHYSICAL REVIEW A*, 1989, 39 (9): 4854-4869.
- [3] 杨定新,胡芑庆,温熙森. 双稳系统数值仿真模型的稳定性分析 [J]. *系统仿真学报*, 2005, 17(10):31-33.
YANG Dingxin, HU Niaoqing, WEN Xisen. Stability analysis for numerical simulation model of bistable system [J]. *Acta Simulate Systematica Sinica*, 2005, 17 (10):31-33.
- [4] GORA P F. An exactly solvable nonlinear model: constructive effects of correlations between Gaussian noises [J]. *Physica A*, 2007, 378(2):201-210.
- [5] XU B, DUAN F, BAO R, et al. Stochastic resonance with tuning system parameters: the application of bistable systems in signal processing [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 13(4): 633-644.
- [6] LI Qiang, WANG Taiyong, LENG Yonggang, et al. Engineering signal processing based on adaptive step-changed stochastic resonance [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21(5):2267-2279.
- [7] 谭继勇,陈雪锋,雷亚国,等. 自适应移频变尺度随机共振在故障诊断中的应用[J]. *西安交通大学学报*, 2009, 43(7):69-73.
TAN Jiyong, CHEN Xuefeng, LEI Yaguo, et al. Adaptive frequency-shifted and re-scaling stochastic resonance and its application to fault diagnosis [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2009, 43(7): 69-73.
- [8] 李华锋,徐博侯. 随机共振系统输出的一种新的反演方法 [J]. *力学学报*, 2003, 35(2):194-198.
LI Huafeng, XU Bohou. A new method to recover the

signal obtained by stochastic resonance [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2): 194-198.

- [9] 张莹,王太勇,冷永刚,等. 双稳随机共振的信号恢复研究 [J]. *力学学报*, 2008, 40(4):528-534.
ZHANG Ying, WANG Taiyong, LENG Yonggang, et al. Study on signal recovery in bistable stochastic resonance [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 40(4): 528-534.
- [10] TAN Jiyong, CHEN Xuefeng, WANG Junying, et al. Study of frequency-shifted and re-scaling stochastic resonance and its application to fault diagnosis [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009(23): 811-822.
- [11] 张宇,吕海峰,赵远,等. 基于非线性系统随机共振的多频信号检测 [J]. *吉林大学学报(信息科学版)*, 2007, 25(1):68-72.
ZHANG Yu, LV Haifeng, ZHAO Yuan, et al. Detection of multi-frequency weak signal based on stochastic resonance of nonlinear system [J]. *Journal of Jilin University (Information Science Edition)*, 2007, 25(1):68-72.
- [12] 丁康. 离散频谱分析校正理论和技术 [D]. 西安: 西安交通大学机械工程学院, 2006.
- [13] 姜洪开. 第二代小波构造理论研究及其在故障特征提取中的应用 [D]. 西安: 西安交通大学机械工程学院, 2006.

[本刊相关文献连接]

自适应移频变尺度随机共振在故障诊断中的应用. 2009, 43(7):69-73.

应用复合加权偏微分方程求解的磁共振水脂分离成像算法. 2009, 43(11):85-89.

基于微动滑移模型的叶片阻尼结构参数研究. 2007, 41(5):507-511.

远程氧等离子体对大肠杆菌的灭菌效果与机理研究. 2008, 42(1):96-100.

微滑移阻尼叶片最优正压力的影响因素分析. 2008, 42(7):828-832.

(编辑 管咏梅)